

## ลิมิตของผลหาร

การหา  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  เมื่อ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  และ  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

**กรณีที่ 1** แยกตัวประกอบของ  $f(x)$  และ  $g(x)$  เพื่อขจัดตัวที่ทำให้ส่วนเป็น 0 ออกไป แล้วหาลิมิตของส่วนที่เหลือ

**ตัวอย่างที่ 1**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= 2+2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ1

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ2

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ3

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ4

RESET

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3x-3)}{(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (3x-3) \\ &= 3(3) - 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ1

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ2

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ3

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ4

RESET

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{3x^2 + 10x + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(3x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-4)}{(3x+4)} \\ &= \frac{(-2) - 4}{3 \cdot (-2) + 4} \\ &= \frac{-6}{-2} \\ &= 3\end{aligned}$$

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ1

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ2

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ3

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ4

ซ่อน ขั้นตอนวิธีทำ5

RESET

4.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9x + 20} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+3)}{(x-4)} \\ &= \frac{5 + 3}{5 - 4} \\ &= \frac{8}{1} \\ &= 8\end{aligned}$$

ข้อนี้ ขั้นตอนวิธีทำ1

ข้อนี้ ขั้นตอนวิธีทำ2

ข้อนี้ ขั้นตอนวิธีทำ3

ข้อนี้ ขั้นตอนวิธีทำ4

ข้อนี้ ขั้นตอนวิธีทำ5

RESET

**กรณีที่ 2** ถ้า  $f(x)$  หรือ  $g(x)$  แยกตัวประกอบไม่ได้ ซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของกรณฑ์ ให้เอาสังยุคของ  $f(x)$  หรือ  $g(x)$  ที่มีกรณฑ์ติดอยู่ไปคูณทั้งเศษและส่วน แล้วขจัดตัวประกอบที่ทำให้เป็น 0 ออกไป แล้วหาขีดจำกัดของส่วนที่เหลือ

สังยุคของ  $a + b$  คือ  $a - b$

สังยุคของ  $a - b$  คือ  $a + b$

สังยุคของ  $\sqrt{a} + b$  คือ  $\sqrt{a} - b$

สังยุคของ  $\sqrt{a} - b$  คือ  $\sqrt{a} + b$

สังยุคของ  $a + \sqrt{b}$  คือ  $a - \sqrt{b}$

สังยุคของ  $a - \sqrt{b}$  คือ  $a + \sqrt{b}$

สังยุคของ  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  คือ  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

สังยุคของ  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  คือ  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

ซ่อน สังยุค1

ซ่อน สังยุค2

ซ่อน สังยุค3

ซ่อน สังยุค4

RESET

## ตัวอย่างที่ 5

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-9}{\sqrt{x-3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x-9}{\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-9)(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-9)(\sqrt{x+3})}{(x-9)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+3}) \\ &= \sqrt{3+3}\end{aligned}$$

ซ่อน วิธีทำ1

ซ่อน วิธีทำ2

ซ่อน วิธีทำ3

ซ่อน วิธีทำ4

ซ่อน วิธีทำ5

RESET

## ตัวอย่างที่ 6

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1) - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{3+1} + 2)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ซ่อน วิธีทำ1

ซ่อน วิธีทำ2

ซ่อน วิธีทำ3

ซ่อน วิธีทำ4

ซ่อน วิธีทำ5

ซ่อน วิธีทำ6

ซ่อน วิธีทำ7

ซ่อน วิธีทำ8

RESET

กรณีที่ 3 ถ้าไม่สามารถขจัดตัวประกอบของ  $g(x)$  ที่ทำให้เป็น 0 ออกไปได้

แสดงว่า  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  หาค่าไม่ได้ หรือไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

จะเห็นว่า  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x-1)}$  หาค่าไม่ได้

ดังนั้น  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$  หาค่าไม่ได้ หรือไม่มีลิมิต

ย้อน กรณี 3

ย้อน ตัวอย่าง

ย้อน ขั้นตอนวิธีทำ 1

ย้อน ขั้นตอนวิธีทำ 2

ย้อน ขั้นตอนวิธีทำ 3

ย้อน ขั้นตอนวิธีทำ 4

RESET

## ให้ทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$$